NO: Date: 14-04-16

Previously on Beligiannis

Έστω G: ομάδα και $H \leq G$. Τότε η H: κανονική υποομάδα της G: $H \trianglelefteq G \iff \forall x \in G, \forall h \in H : x^{-1}hx \in H$

$\iff \forall x \in G : x^{-1}Hx \subseteq H$

$\iff \forall x \in H : x^{-1}Hx = H$

$\iff \forall x \in G : xH = Hx$

$\iff$ Η πράξη $\cdot : G/H \times G/H \longrightarrow G/H$

$(xH, yH) \mapsto xH \cdot yH = (xy)H$, είναι καλά ορισμένη

• Πόρισμα: Αν $H \trianglelefteq G$, τότε το ζεύγος $(G/H, \cdot)$ όπου "$\cdot$" είναι η πράξη: $xHyH = (xy)H$ είναι ομάδα με:

• $e_{G/H} = eH = H$, • $(xH)^{-1} = x^{-1}H$

$\forall x, y \in G : x \sim_H y \iff x^{-1}y \in H$

$x \sim^H y \iff xy^{-1} \in H$

$G/\sim_H = \{xH \subseteq G \mid x \in G\} = G/H$

$G/\sim^H = \{Hx \subseteq G \mid x \in G\}$

Αν $H \trianglelefteq G$, τότε: $xH = Hx, \forall x \in G$ κι άρα $G/\sim_H = G/\sim^H$

Άσκηση: Δείξτε ότι: $\sim_H = \sim^H$

NO:
Date:

Αν $H \trianglelefteq G$ θα γράφουμε: $G/\sim_H = G/H = G/\sim^H$ και θα καλούμε την ομάδα G/H: ομάδα-πηλίκο της G ως προς την H.

Παράδειγμα: Αν G: ομάδα, τότε: $\{e\} \trianglelefteq G$ κ' $G \trianglelefteq G$

• Ορισμός: Μια ομάδα G καλείται απλή $\Leftrightarrow$ οι μόνες κανονικές υποομάδες της G είναι οι: $\{e\}$, G

! Πρόβλημα (1): Ταξινόμηση όλων των πεπερασμένων ομάδων.

• Παρατήρηση: Αν μια ομάδα G είναι αβελιανή, τότε κάθε υποομάδα της είναι κανονική.

Πράγματι, αν $H \leq G$, τότε $\forall x \in G, \forall h \in H: x^{-1}hx = x^{-1}xh =$
$= eh = h \in H$

! Πρόβλημα (2): Ταξινόμηση όλων των απλών (πεπερασμένων) αβελιανών ομάδων.

Έστω G: αβελιανή ομάδα. Τότε, επειδή κάθε υποομάδα αβελιανής ομάδας είναι κανονική έπεται ότι η G έχει ακριβώς δύο υποομάδες: $\{e\}$, G

Τότε: $G \neq \{e\}$, οπότε $\exists x \in G: x \neq e$. Έστω $\langle x \rangle \leq G$

Οπότε, $\langle x \rangle \neq \{e\}$ κι άρα $\langle x \rangle = G$, άρα η G: κυκλική

Αν $|G| = \infty$, τότε η G έχει άπειρες υποομάδες. Άτοπο

Συνεπώς, η G είναι πεπερασμένη!

NO:
Date:

- Αν $|G|$: σύνθετος αριθμός $\Rightarrow \exists\, n \mid |G|$, $n \neq 1$ και $n \neq |G|$ και υπάρχει $H \leq G$ με $|H| = n$: άτοπο

Άρα $|G|$: πρώτος

Συνεπώς, οι απλές αβελιανές ομάδες είναι ακριβώς οι κυκλικές με τάξη ένα πρώτο αριθμό.

→ Αν G: ομάδα, τότε το υποσύνολο $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \ \forall y \in G\}$ καλείται το κέντρο της G.

- Ισχυρισμός: $Z(G) \leq G$

- $e \in Z(G)$, διότι: $ey = y = ye \ \forall y \in G$

- Έστω $x_1, x_2 \in Z(G)$: $(x_1 x_2) y = x_1 (x_2 y) = x_1 (y x_2) = (x_1 y) x_2$

$= (y x_1) x_2 = y (x_1 x_2) \Rightarrow x_1 x_2 \in Z(G)$

Άσκηση: $x \in Z(G) \Rightarrow x^{-1} \in Z(G)$

- Πρόταση: Έστω G: ομάδα.

1. $H \leq Z(G) \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Ιδιαίτερα: $Z(G) \trianglelefteq G$ και κάθε αβελιανή ομάδα έχει την ιδιότητα ότι κάθε υποομάδα της είναι κανονική.

NO:
Date:

(9) $\left.\begin{array}{l} H \leq G \\ [G:H]=2 \end{array}\right\}$ Τότε $H \trianglelefteq G$

Απόδειξη: (1) Έστω ότι $H \leq Z(G)$ κι έστω $x \in G, h \in H$

Τότε: $x^{-1} h x \xrightarrow[hx = xh]{h \in H \leq Z(G)} x^{-1} x h = eh = h \in H$

Άρα, $H \trianglelefteq G$

• Πόρισμα: G: αβελιανή $\Longleftrightarrow G = Z(G)$

(2) Έστω $[G:H]=2$. Τότε $G \neq H$ κι άρα $\exists x \in G \setminus H$

Έτσι $G \setminus H \neq \emptyset$

Θα δείξουμε ότι α) $\forall x \in G \setminus H : xH = G \setminus H = Hx$

β) $\forall h \in H : hH = Hh$. Αυτό ισχύει πάντα.

Απόδειξη του α: Τότε $H \cap xH = \emptyset$, διότι αν $h \in H \cap xH$
τότε: $h \in H$ και $h \in xH$

Τότε: $h \in H \Rightarrow h = xh'$, όπου $h' \in H$. Τότε:

$\left.\begin{array}{l} x = h(h')^{-1} \\ h, h' \in H \end{array}\right\}$ $x \in H$
Άτοπο, διότι $x \in G \setminus H$

NO:
Date:

Έστω οι αριστερές πλευρικές κλάσεις: H, xH όπου $x \in G \setminus H$

Επειδή $[G:H]=2$, αυτές οι δύο, H, xH είναι όλες οι αριστερές πλευρικές κλάσεις

Άρα, $\{H, xH\}$: διαμέριση της G.

Ανάλογα, $\{H, Hx\}$: διαμέριση της G

Συνεπώς, $xH = Hx$ και μάλιστα $xH = Hx = G \setminus H$

Άρα: $\boxed{H \trianglelefteq G}$

• <u>Παράδειγμα</u>: Οι υποομάδες της S_3 είναι:

$\{i\}$, S_3, $\langle \sigma_1 \rangle$, $\langle \sigma_2 \rangle$, $\langle \sigma_3 \rangle$, $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_2 \rangle$, όπου

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $o(\langle \rho_1 \rangle) = 3 \Rightarrow [S_3 : \langle \rho_1 \rangle] = \frac{|S_3|}{|\langle \rho_1 \rangle|} = \frac{6}{3} = 2$

$\Rightarrow \langle \rho_1 \rangle \trianglelefteq S_3$

NO:
Date:

- Για την $\langle \sigma_1 \rangle \leq S_3$, τότε: $\sigma_2 \cdot \langle \sigma_1 \rangle = \sigma_2 \cdot \{i, \sigma_1\} = \{\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\}$

$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \rho_2$

Άρα, $\{\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\} = \{\sigma_2, \rho_2\}$

- $\langle \sigma_1 \rangle \sigma_2 = \{i, \sigma_1\}\sigma_2 = \{\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\} = \{\sigma_2, \rho_1\} \neq \{\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\}$

$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \rho_1$

Άρα $\sigma_2\langle \sigma_1 \rangle \neq \langle \sigma_1 \rangle \sigma_2 \Rightarrow \langle \sigma_1 \rangle \ntrianglelefteq S_3$

Ομοίως: $\sigma_2 \trianglelefteq S_3$

$\langle \sigma_3 \rangle \ntrianglelefteq S_3$

- $H \leq Z(G) \Rightarrow H \trianglelefteq G$

$H \trianglelefteq G \overset{?}{\Rightarrow} H \leq Z(G)$

Γενικά $H \trianglelefteq G \not\Rightarrow H \leq Z(G)$

Είδαμε ότι $\langle \rho_1 \rangle \trianglelefteq S_3$.
Ομοίως $\langle \rho_1 \rangle \nleq Z(S_3)$
διότι $Z(S_3) = \{i\}$

$Z(S_3) \leq S_3$ και μάλιστα $Z(S_3) \trianglelefteq S_3 \Rightarrow Z(S_3) = \{i\}$ ή S_3 ή $\langle \rho_1 \rangle$

- $Z(S_3) \neq S_3$, διότι η S_3 δεν είναι αβελιανή
- $Z(S_3) \neq \langle \rho_1 \rangle$, διότι θα έπρεπε: $\rho_1\sigma_2 = \sigma_2\rho_1$: άτοπο

Άρα: $Z(G) = \{i\}$

NO:
Date:

- G: αβελιανή $\Longrightarrow \forall\ H \leq G : H \trianglelefteq G$

Αν ξέρω ότι $H \trianglelefteq G$ για κάθε $H \leq G \overset{?}{\Longrightarrow} G$: αβελιανή

Έστω $Q = \{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm K\}$ όπου

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Τότε: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = I_2$, $IJ = K$ και $JI = -K$

- Η ομάδα Q, είναι η ομάδα τετρανίων του Hamilton και είναι μη-αβελιανή, τάξης 8.

Ισχυρισμός: Κάθε υποομάδα της G είναι αβελιανή.

Υποομάδες της Q: $\{I_2\}, Q, \langle I \rangle = \langle -I \rangle, \langle J \rangle = \langle -J \rangle, \langle K \rangle = \langle -K \rangle, \langle -I_2 \rangle$

- $\langle I_2 \rangle \trianglelefteq Q$
- $Q \trianglelefteq Q$
- $\langle I \rangle \trianglelefteq Q$
- $\langle J \rangle \trianglelefteq Q$
- $\langle K \rangle \trianglelefteq Q$

Διότι: $|\langle I \rangle| = |\langle J \rangle| = |\langle K \rangle| = 4$

$\Rightarrow [Q : \langle I \rangle] = [Q : \langle J \rangle] = [Q : \langle K \rangle] = 2$

NO:
Date:

Για την $\langle -I_2 \rangle$, $\forall x \in Q : x^{-1}Hx \in \langle -I_2 \rangle \ \forall H \in \langle -I_2 \rangle$

$= \{ I_2, -I_2 \}$

i) $x^{-1}I_2 x = x^{-1}x = I_2 \in \langle -I_2 \rangle$ και

ii) $x^{-1}(-I_2)x = -x^{-1}I_2 x = -I_2 \in \langle -I_2 \rangle \Rightarrow \langle -I_2 \rangle \trianglelefteq Q$

Ορισμός: Γενικά μια ομάδα G καλείται ομάδα Hamilton αν και μόνο αν G: όχι αβελιανή αλλά κάθε υποομάδα της είναι κανονική

• Μια ομάδα G είναι ομάδα Hamilton αν και μόνο αν

$G \simeq Q \times H$, Q: Ομάδα τετρανίων του Hamilton

H: αβελιανή ομάδα, κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη, $\neq 4$

• Αν $H \leq K$ και $K \leq G$, τότε $H \leq G$

• Αν $H \trianglelefteq K$ και $K \trianglelefteq G$, τότε $H \trianglelefteq G$? → Όχι

Ορισμός: Αν G_1, G_2 είναι ομάδες, τότε μια απεικόνιση $f: G_1 \to G_2$, καλείται ομομορφισμός ομάδων $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in G_1 : f(xy) = f(x)f(y)$

NO:
Date:

Παρατήρηση: Αν $f: G_1 \to G_2$ είναι ομομορφισμός ομάδων τότε: $Kerf = \{x \in G_1 / f(x) = e_2\} \trianglelefteq G_1$

Kerf: πυρήνας του f

Απόδειξη: i) $e_1 \in Ker(f)$, διότι: $f(e_1) = e_2$

$f(e_1) = f(e_1 \cdot e_2)$
$= f(e_1) f(e_1)$ $\frac{\text{Νόμος}}{\text{Διαγραφής}}$
$= f(e_1) = e_2$

ii) Αν $x, y \in Ker(f) \Rightarrow f(x) = e_2 = f(y)$

Τότε: $f(xy) = f(x) f(y) = e_2 e_2 = e_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = Kerf$

iii) Αν $x \in Kerf \Rightarrow f(x) = e_2$. Τότε: $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = e_2^{-1} = e_2$

$\Rightarrow x^{-1} \in Kerf$. Άρα $Kerf \leq G_1$

Έστω $x \in G_1$, $h \in Kerf$. ΘΔο: $x^{-1} h x \in Kerf$

$f(x^{-1} h x) = f(x^{-1}) f(h) f(x) = f(x)^{-1} e_2 f(x) = f(x)^{-1} f(x) = e_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{-1} h x \in Kerf$

Οπότε: $\boxed{Kerf \trianglelefteq G_1}$